Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN1

Matematisk analys del1

Utförliga lösningar (kommer efter Facit) som ska hjälpa extra vid eventuella studier, lägg extra fokus på notationen, titta gärna på undervisningsanteckningar för eventuella lösningsalternativ

2022-10-30, kl 8.00-13.00

Facit:

1a. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ eller \\ x = \dfrac{17\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases}$, där $n \in Z$

1b. $\begin{cases} x = \pi + \dfrac{4\pi n}{3} \\ eller \\ x = \dfrac{3\pi}{5} + \dfrac{4\pi n}{5} \end{cases}$, där $n \in Z$

1c. $x = 3$

2a. $|z| = \sqrt{3}$ och $arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}$

2b. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

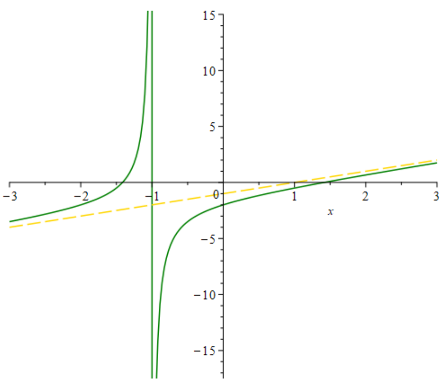
3a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} = 5$

3b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sin(3x-3)}{\ln x} = 3$

3c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} = 1$

4.

$f(x) = \dfrac{(x^2-2)}{(x+1)}, y = x - 1$ (*sned asymptot*), $x = -1$ (*lodrät asymptot*)



Funktionen har inga extrempunkter, har lodrät asymptot $x = 1$, har ingen horisontell asymptot och har en sned asymptot $y = x - 1$.

5. $z = 2i$ eller $z = -\sqrt{3} - i$ eller $z = \sqrt{3} - i$

6.

- För $k < -2$ och för $k > 2$ har ekvationen två lösningar
- För $k = -2$ och för $k = 2$ har ekvationen en lösning
- För $-2 < k < 2$ har ekvationen inga lösningar

7. Toppvinkeln är $2\,arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1.

a)

$$4\sin(3x-\pi/4)=-2 \Leftrightarrow \sin(3x-\pi/4)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\pi/4=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ eller \\ 3x-\pi/4=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+2\pi n \\ eller \\ 3x=\frac{14\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+2\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \\ eller \\ x=\frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \end{cases}, \text{där } n\in Z$$

Svar a): $\begin{cases} x=\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \\ eller \\ x=\frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \end{cases}$, där $n\in Z$

b) $$\cos(2x-3\pi/2)=\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x-3\pi/2=\pm\frac{x}{2}+2\pi n, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\pi/2=\frac{x}{2}+2\pi n \\ eller \\ 2x-3\pi/2=-\frac{x}{2}+2\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n \\ eller \\ 2x+\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow$$ [Tips: lättast är att multiplicera båda leden av respektive ekvation med 2]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-x=3\pi+4\pi n \\ eller \\ 4x+x=3\pi+4\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3\pi+4\pi n \\ eller \\ 5x=3\pi+4\pi n \end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi+\frac{4\pi n}{3} \\ eller \\ x=\frac{3\pi}{5}+\frac{4\pi n}{5} \end{cases}, \text{där } n\in Z$$

Svar b): $\begin{cases} x=\pi+\frac{4\pi n}{3} \\ eller \\ x=\frac{3\pi}{5}+\frac{4\pi n}{5} \end{cases}$, där $n\in Z$

c) $\ln(x+3)+\ln x^2=3\ln x-\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$, där följande x är av intresse $\begin{cases} x+3>0 \\ x^2\neq 0 \\ \frac{1}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq 0 \\ x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Vi söker alltså en lösning som är större än 1 ($x>1$). Nu kan vi jobba med räknelagar för ln.

För $x>1$ gäller nu att (obs: först nu kan vi använda "ekvivalens" tecken vid omskrivningar, ty $x>1$)

$$ln(x+3)+ln\,x^2=3\,ln\,x-ln\left(\frac{1}{x-1}\right) \text{ och } x>1 \Leftrightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\,x^3-ln(x-1)^{-1} \text{ och } x>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\,x^3+ln(x-1) \text{ och } x>1 \Leftrightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\left(x^3(x-1)\right) \text{och } x>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2(x+3)}=e^{x^3(x-1)} \text{ och } x>1 \Leftrightarrow x^2(x+3)=x^3(x-1) \text{ och } x>1 \Leftrightarrow x^2(x+3)-x^3(x-1)=0 \text{ och } x>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3-x(x-1))=0 \text{ och } x>1 \Leftrightarrow (x^2=0 \text{ eller } -(x^2-2x-3)=0) \text{ och } x>1 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \text{ och}$$
$$x>1 \Leftrightarrow (x=-1 \text{ eller } x=3) \text{ och } x>1 \Leftrightarrow x=3$$

(obs: vi jobbar med " $\Leftrightarrow$ " **och** vilkoret i varje steg " och $x>1$ " , detta innebär att då $x^2=0$ och $x>1$ så kunde vi automatiskt "plocka bort" lösningen för $x^2=0$ och vidare på motsvarande sätt då $x=-1$ och $x>1$ så kunde vi automatiskt "plocka bort" lösningen $x=-1$. Så notationen är av vikt här och sparar onödiga kommentarer för oss)

Svar: $x=3$

Alternativ lösning är följande (obs: här kan vi **inte** jobba med " $\Leftrightarrow$ " från början när vi löser ekvationen, **märker** du vad som är skillnaden här med tidigare lösning? **BRA!**)

Krav: $\begin{cases} x+3>0 \\ x^2\neq 0 \\ \dfrac{1}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq 0 \\ x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$ (så klart samma som innan)

Obs: tecken nu vid varje steg

$$ln(x+3)+ln\,x^2=3\,ln\,x-ln\left(\frac{1}{x-1}\right) \Rightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\,x^3-ln(x-1)^{-1} \Rightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\,x^3+ln(x-1) \Rightarrow$$

Obs: tecken nu vid varje steg

$$\Rightarrow ln\left(x^2(x+3)\right)=ln\left(x^3(x-1)\right) \Rightarrow \text{/ln är injektiv/} \Rightarrow x^2(x+3)=x^3(x-1) \Leftrightarrow x^2(x+3-x(x-1))=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=0 \text{ eller } (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=-1 \text{ eller } x=3$$

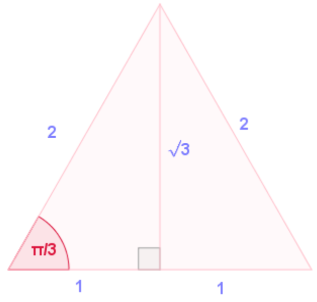
(men vi började med " $\Rightarrow$ " och avslutade med " $\Leftrightarrow$ " därför måste kontrolleras om lösningarna uppfyller kravet , $x>1$)

$x=0$ och $x=-1$ uppfyller inte kravet $x>1$. $x=0$ och $x=-1$ är falska lösningar.

Svar: $x=3$

2. a.

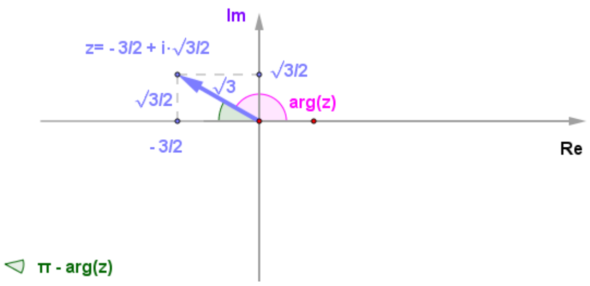
$$z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3} - 2 =$$



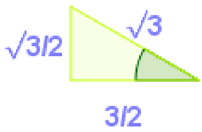
$$= \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{3}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$ då blir $|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$.

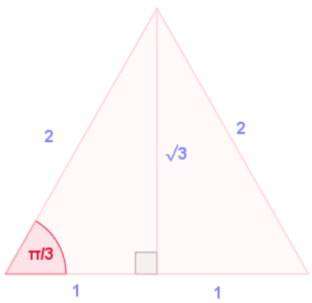
Alltså $|z| = \sqrt{3}$.

Sök nu $arg(z)$: (när du ritar så förstår du mycket bättre hur du ska tänka)



Fokusera på den lilla triangel där vi kan titta speciellt på den gröna vinkeln $\pi - arg(z)$.





$$\sin(\pi - arg(z)) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{vi söker bara en vinkel} \\ \text{titta på triangeln}\end{bmatrix} \Rightarrow (\pi - arg(z)) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow arg(z) = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow arg(z) = \frac{5\pi}{6}$$

Svar: $|z| = \sqrt{3}$ och $arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

2.

b. Vi söker tangentens ekvation $y = kx + m$ i den punkt där $x = 1$.

Tangeringspunktens koordinater är $P = (1, y(1)) = \left(1, \frac{2\ln 1}{1^2 - 2\cdot 1 + 5}\right) = (1{,}0)$.

$k = y'(1)$ där

$$y' = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot(x^2 - 2x + 5) - 2\ln x\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} \Rightarrow k = y'(1) = \frac{2\cdot\frac{1}{1}\cdot(1^2 - 2\cdot 1 + 5) - 2\ln 1\cdot(2\cdot 1 - 2)}{(1^2 - 2\cdot 1 + 5)^2} = \frac{8-0}{16} = \frac{1}{2}$$

(obs: vi har inget intresse att slösa tid på att förenkla derivatan)

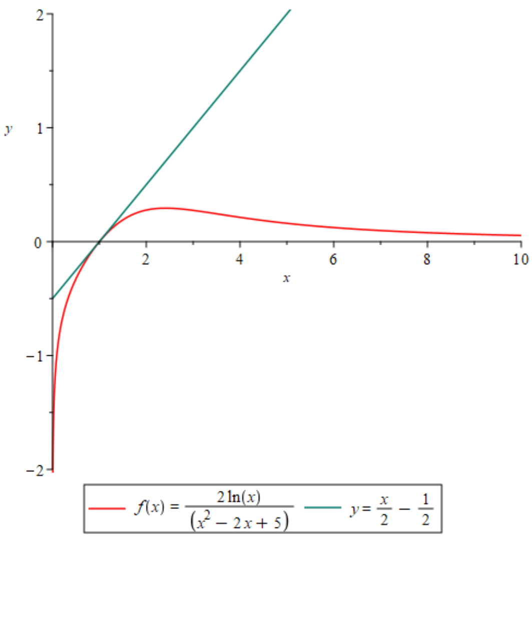
Vi har $k = \frac{1}{2}$ och tangeringspunktens koordinater $P = (x, y) = (1{,}0)$. Insättning av respektive i

$y = kx + m \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot 1 + m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

För $k = \frac{1}{2}$ och $m = -\frac{1}{2}$ blir tangentens ekvation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Svar: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(titta gärna på bifogad bild av f(x) och tangenten där $x = 1$)



3.
a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\left[typ="\frac{0}{0}"\Rightarrow (x-1)\text{ är en faktor i nämnaren med}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}1\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)=1\cdot(1^4+1^3+1^2+1+1)=5$$

svar: $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=5$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{\ln x}=\left[typ="\frac{0}{0}"\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3(x-1))}{\ln x}=\begin{bmatrix}(x-1)=t\\ t\to 0 \text{ då } x\to 1\\ x=t+1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t)}{\ln(1+t)}=\left[typ="\frac{0}{0}"\right]\begin{bmatrix}\text{standard gränsvärdent av intresse här}\\ \lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a}=1\\ \lim_{a\to 0}\frac{\ln(1+a)}{a}=1\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin(3t)}{3t}\cdot 3t}{\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin(3t)}{3t}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}\cdot\frac{3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t)}{3t}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}\cdot 3=1\cdot\frac{1}{1}\cdot 3=3$$

Svar: $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{\ln x}=3$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}=\left[typ="\frac{0}{0}"\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-(x+1)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\left[typ="\frac{0}{0}"\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2-x\right)}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2-x\right)}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(x^2-x\right)}{\left(1-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)\cdot(x-1)}{-(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1+\sqrt{x+1}\right)\cdot(x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-\left(1+\sqrt{0+1}\right)\cdot(0-1)}{\left(\sqrt{0^2+1}+\sqrt{0+1}\right)}=\frac{-2\cdot(-1)}{2}=1$$

Svar: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}=1$

4.

$$f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$$

$D_f: x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \Rightarrow \quad x=-1$ är ekvationen för den lodräta asymptoten

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2+2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2}$$

Alltså $f'(x)>0$ för alla $x\in D_f$, funktionen har inga stationära punkter

x		-1	
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\nearrow$	Ej def.	$\nearrow$

Gränsvärden då $x\to-\infty$ och då $x\to(-1)^-$ och då $x\to(-1)^+$ placeras efter vidare beräkningar

Lodräta asymptot $x=-1$

Gränsvärden då $x\to+\infty$

Vi undersöker nu hur funktionen uppför sig vid $x=-1$ och då $x\to-\infty$ respektive $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}\cdot(x^2-2)=\begin{bmatrix} x+1\to0^- \text{ då } x\to-1^- \\ \frac{1}{x+1}\to-\infty \text{ då } x\to-1^-\end{bmatrix}=-\infty\cdot(1-2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}\cdot(x^2-2)=\begin{bmatrix} x+1\to0^+ \text{ då } x\to-1^+ \\ \frac{1}{x+1}\to+\infty \text{ då } x\to-1^+\end{bmatrix}=\infty\cdot(1-2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\begin{bmatrix}\frac{2}{x}\to0 \text{ då } x\to-\infty \\ \frac{1}{x}\to0 \text{ då } x\to-\infty\end{bmatrix}=(-\infty-0)\cdot\frac{1}{1+0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\begin{bmatrix}\frac{2}{x}\to 0 \text{ då } x\to+\infty\\ \frac{1}{x}\to 0 \text{ då } x\to+\infty\end{bmatrix}=(+\infty-0)\cdot\frac{1}{1+0}=+\infty$$

(Obs: ty $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x+1}=-\infty$ och $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x+1}=+\infty$, alltså har funktionen inga horisontella asymptoter)

Finns det sneda asymptoter $y=kx+m$?

(Obs:Visas enklast med hjälp av polynomdivisionen)

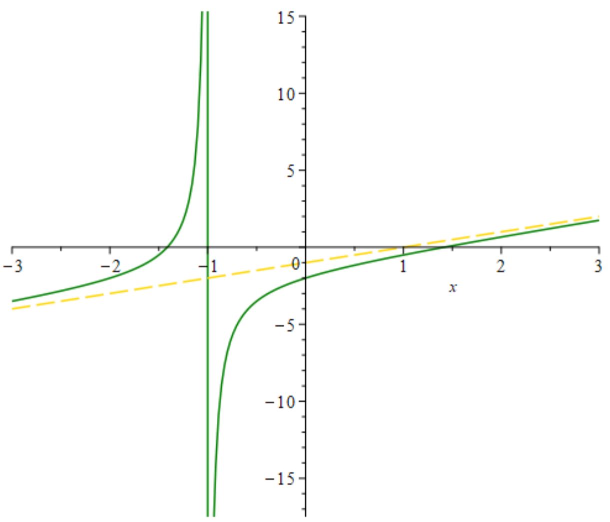
$$f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}=[polynomdivision]=(x-1)-\frac{1}{x+1}\to y=(x-1) \text{ då } x\to\pm\infty$$

Funktionen har en sned asymptot $y=(x-1)$ då $x\to\pm\infty$.

Vi kan komplettera teckentabellen :

x		-1	
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	Ej def.	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$f(x)=\frac{(x^2-2)}{(x+1)}$, $y=x-1$ (*sned asymptot*), $x=-1$ (*lodrät asymptot*)



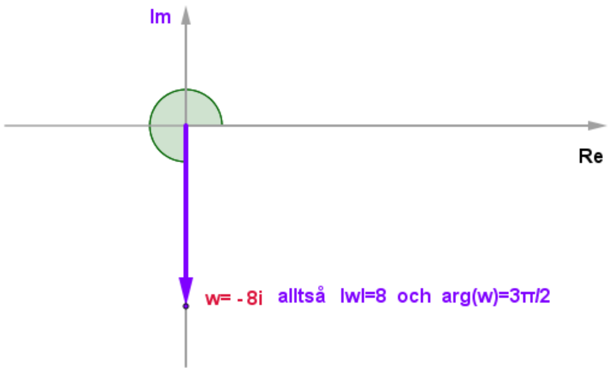
Svar: Funktionen har inga extrempunkter, har lodrät asymptot $x=1$, har ingen horisontell asymptot och har en sned asymptot $y=x-1$.

(OBS: alternativa sätt att fram de sneda asymptoterna hittar du i dina anteckningar från seminariet)

5.

Lösning:

$z^3 = -8i$



$z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i}$, där $k = 0,1,2$

Genom att skriva z i polär form $z = re^{\beta i}$ kommer ekvationen $z^3 = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i} \Rightarrow$

$$\left(re^{\beta i}\right)^3 = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i} \Leftrightarrow r^3 e^{3\beta i} = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ e^{3\beta i} = e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i}, \text{där } k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 3\beta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \text{där } \quad k = 0,1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \text{där } \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

vi får därför lösningarna

$$z = re^{\beta i} = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)i}, \text{där } \quad k = 0,1,2$$

För respektive värde på k, får vi nu alla tre lösningar till $z^3 = -8i$:

- $k = 0$ ger

$$z = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)i} = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot 1) = 2\cdot i \Rightarrow z = 2i$$

- $k = 1$ ger

$$z = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)i} = 2e^{\left(\frac{7\pi}{6}\right)i} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3} - i \Rightarrow z = -\sqrt{3} - i$$

- $k = 2$ ger

$$z = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)i} = 2e^{\left(\frac{11\pi}{6}\right)i} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - i \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$$

Svar: $z = 2i$ eller $z = -\sqrt{3} - i$ eller $z = \sqrt{3} - i$

6.

Vi ska undersöka först $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{\ln x}$, där $f(x) = k$

(Obs: om t.ex. $f(x) = 0$ är $k = 0$ och vi får funktionens nollställen som är lösningar till ekvationen $\ln x + \dfrac{1}{\ln x} = 0$ o.s.v.)

$D_f : \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ är ekvationen för den lodräta asymptoten och $x = 0$ är ekvationen för den lodräta asymptoten men bara då $x \to 0^+$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2} = \frac{(\ln(x))^2 - 1}{x \cdot (\ln(x))^2} = \frac{(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)}{x \cdot (\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln(x)-1)(\ln(x)+1) = 0 \Leftrightarrow (\ln(x)-1) = 0 \text{ eller } (\ln(x)+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ eller } \ln(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ eller } x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e	
$(\ln(x)+1)$		-	0	+		+		+
$(\ln(x)-1)$		-		-		-	0	+
$x \cdot (\ln(x))^2$		+		+		+		+
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
$f(x)$	Ei def.	$\nearrow$	$f_{max}\left(\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$	Ei def.	$\searrow$	$f_{min}(e)$	$\nearrow$

Gränsvärden då $x \to -\infty$ och då $x \to 0^+$

placeras efter vidare beräkningar

Gränsvärden då $x \to +\infty$ då $x \to 1^-$ och då $x \to 1^+$

placeras efter vidare beräkningar

$$f_{lokal\ \ max}\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{\ln\frac{1}{e}}=\ln e^{-1}+\frac{1}{\ln e^{-1}}=-\ln e-\frac{1}{\ln e}=-1-1=-2$$

$$f_{lokal\ \ min}(e)=\ln e+\frac{1}{\ln e}=1+1=2$$

Vi undersöker nu hur funktionen uppför sig vid $x=-1$ *och då* $x\to-\infty$ *respektive* $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=\begin{bmatrix}\ln x\to-\infty \text{ då } x\to 0^+\\ \frac{1}{\ln x}\to 0 \text{ då } x\to 0^+\end{bmatrix}=-\infty+0=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=\begin{bmatrix}\ln x\to 0^- \text{ då } x\to 1^-\\ \frac{1}{\ln x}\to-\infty \text{ då } x\to 1^-\end{bmatrix}=0-\infty=-\infty$$

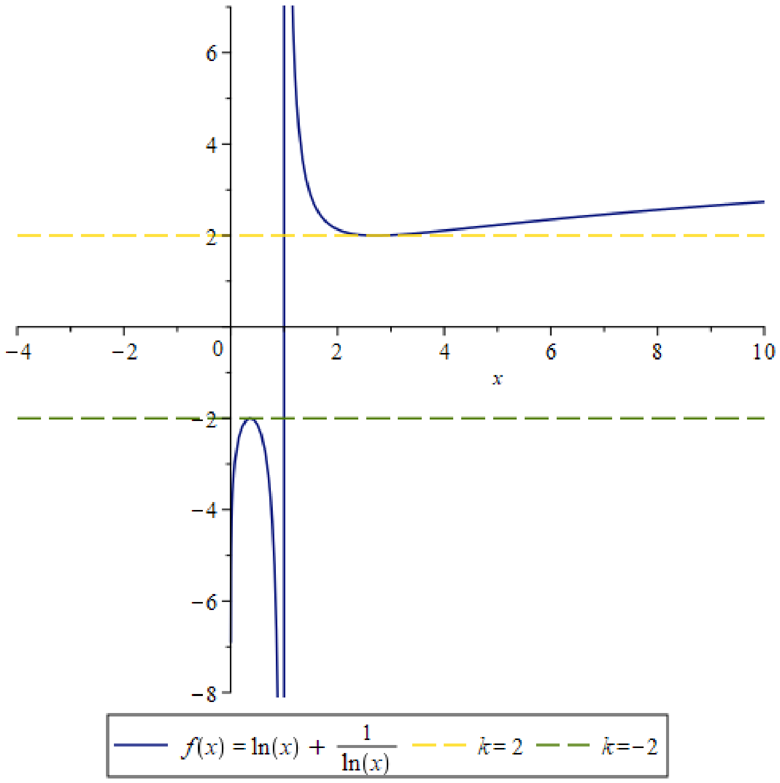
$$\lim_{x\to 1^+}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=\begin{bmatrix}\ln x\to 0^+ \text{ då } x\to 1^+\\ \frac{1}{\ln x}\to+\infty \text{ då } x\to 1^+\end{bmatrix}=0+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=\begin{bmatrix}\ln x\to+\infty \text{ då } x\to+\infty\\ \frac{1}{\ln x}\to 0 \text{ då } x\to+\infty\end{bmatrix}=+\infty+0=+\infty$$

(Obs: ty $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)=+\infty$, alltså har funktionen ingen horisontell asymptoter då $x\to+\infty$)

Vi kan komplettera teckentabellen :

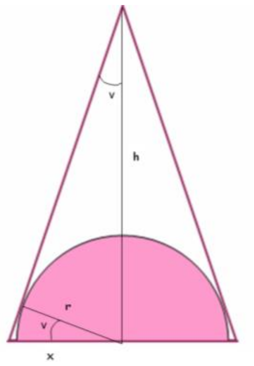
x	0		$\frac{1}{e}$		1		e	
$(\ln(x)+1)$		-	0	+		+		+
$(\ln(x)-1)$		-		-		-	0	+
$x\cdot(\ln(x))^2$		+		+		+		+
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ Ei def.	↗	$f_{max}\left(\frac{1}{e}\right)=-2$	↘	$-\infty$ Ei def. $+\infty$	↘	$f_{min}(e)=2$	↗ $+\infty$



Svar:

- För $k < -2$ och för $k > 2$ har ekvationen två lösningar
- För $k = -2$ och för $k = 2$ har ekvationen en lösning
- För $-2 < k < 2$ har ekvationen inga lösningar

7.



Lösning:

Vi kallar halva toppvinkeln v där $0 < v < \frac{\pi}{2}$

Dra en radie där i klotet till en punkt där klotet tangeras av konen.

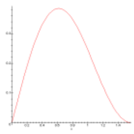
Vinkeln mellan denna radie och konens basradie är också v. (likformighet)
Man får

$h = \frac{r}{\sin v}$ och $x = \frac{r}{\cos v}$

Konens volym

$$V=\frac{\pi}{3}x^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2}{\cos^2 v}\cdot\frac{r}{\sin v}=\frac{\pi\cdot r^3}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 v\cdot\sin v}$$

Vi studerar nu funktionen $y=\cos^2 v\cdot\sin v$, $\left(0<v<\frac{\pi}{2}\right)$



När y har maximum har V minimum.

$$y'=2\cos v\cdot(-\sin v)\cdot\sin v+\cos^2 v\cdot\cos v=\cos v\cdot\left(2(-\sin v)\cdot\sin v+\cos^2 v\right)=$$
$$=\cos v\cdot\left(\cos^2 v-2\sin^2 v\right)$$

I intervallet $0<v<\frac{\pi}{2}$ är $v>0.$

$y'=0\Rightarrow\ \cos v=0$ eller $\cos^2 v-2\sin^2 v=0$.

Bara ekvationen $\cos^2 v-2\sin^2 v=0$ är av intresse ty $0<v<\frac{\pi}{2}$.

$$\cos^2 v-2\sin^2 v=0\Leftrightarrow\tan^2 v=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\tan v=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ty $0<v<\frac{\pi}{2}$ är $\tan v=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow v=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Eftersom $y>0$ i intervallet $0<v<\frac{\pi}{2}$ (OBS: $y(0)=0$ och $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$) så måste det erhållna värdet ger ett maximum för y, d.v.s ett minimum för V .

Toppvinkeln är då $2v=2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Svar: Toppvinkeln är $2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.